Wie löst man eine Gleichung?

Eine Gleichung wird gelöst, indem man sie, ohne dass sich die Lösungsmenge ändert, Schritt für Schritt in eine sog. „*unmittelbar auflösbare Gleichung*“ umwandelt.

Unter einer solchen unmittelbar auflösbaren Gleichung versteht man eine Gleichung, bei der auf der einen Seite die Variable und auf der anderen Seite eine Zahl steht. Bsp.: x=5

Bei dieser Gleichung kann man „unmittelbar“ die Lösungsmenge angeben: L={5}

Die eigentliche Schwierigkeit besteht darin, die Umformungen zu finden, die z. B. aus der Gleichung 2(x+4)-3x=7 die „unmittelbar lösbare“ Gleichung mit der gleichen Lösungsmenge x=1 macht.

Umformungen, bei denen sich die Lösungsmenge der Gleichung nicht ändert, nennt man Äqivalenzumformungen. Um zu kennzeichnen, dass zwei Gleichungen äquivalent sind, also die gleiche Lösungsmenge besitzen, setzt man zwischen sie das Äquivalenzzeichen $\Leftrightarrow$. Dieses Äquivalenzzeichen muss deutlich von dem Gleichheitszeichen unterschieden werden – ein Gleichheitszeichen steht zwischen zwei Termen (nicht zwischen Gleichungen), die die gleiche Zahl darstellen (Bsp.: 3+5=8).

Um sich klar zu machen, welche Umformungen die Lösungsmenge einer Gleichung nicht verändern (also welche Umformungen Äquivalenzumformungen sind), ist es hilfreich, sich eine Gleichung als Waage vorzustellen.

Auf der linken Waagschale befindet sich alles, was links vom Gleichheitszeichen steht, auf der rechten Waagschale das, was rechts vom Gleichheitszeichen steht. Das Gleichheitszeichen selbst deutet an, dass sich linke und rechte Waagschale in gleicher Höhe befinden.

Eine Äquivalenzumformung liegt also dann vor, wenn sich die Waage vor und nach der Umformung im Gleichgewicht befindet. Dies ist ganz sicher der Fall, wenn auf einer der beiden Seiten eine Termumformung vorgenommen wird.

Bsp.:

$$\frac{1}{2}x = 14:2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}x = 7$$

$$2x + 3x = 10 \quad \Leftrightarrow \quad 5x = 10$$

$$3 \cdot 2x = 2 \quad \Leftrightarrow \quad 6x = 2$$

$$x = 5 - 3 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2$$

$$\frac{12x}{4} = 5 \quad \Leftrightarrow \quad 3x = 5$$

Wird auf einer der beiden Seiten einer Gleichung eine Termumformung vorgenommen, dann ändert sich die Lösungsmenge der Gleichung nicht!

Eine Äquivalenzumformung liegt auch dann vor, wenn man auf beiden Seiten der Gleichung die gleiche Zahl addiert. Diese Addition einer Zahl kann man sich so vorstellen, dass auf beide Waagschalen jeweils ein weiteres, gleiches Gewichtsstück gelegt wird. Die Waage bleibt im Gleichgewicht oder: Die Lösungsmenge der Gleichung ändert sich nicht.
Das Gleiche gilt natürlich auch, wenn man von beiden Waagschalen ein gleich großes Gewichtsstück entfernt. Dies entspricht einer Subtraktion der gleichen Zahl von beiden Seiten einer Gleichung.

Wird auf beiden Seiten einer Gleichung die gleiche Zahl addiert oder subtrahiert, ändert sich die Lösungsmenge der Gleichung nicht (liegt eine Äquivalenzumformung vor).

$3x = 5$	$\Leftrightarrow$	$3x + 1 = 5 + 1$
$6 - 3x = 4 - x$	$\Leftrightarrow$	$6 - 3x + 2 = 4 - x + 2$
$x + 4 = 8$	$\Leftrightarrow$	$x + 4 - 4 = 8 - 4$
$3x - 5 = 2x + 4$	$\Leftrightarrow$	$3x - 5 - 2x = 2x + 4 - 2x$

Um herauszufinden, welche Zahl beim Einsetzen in die Variable aus einer Aussageform eine wahre Aussage macht (oder anders ausgedrückt: Um die Lösungsmenge einer Gleichung zu ermitteln), versucht man die Gleichung Schritt für Schritt in immer einfachere, äquivalente Gleichungen zu verwandeln, bis eine unmittelbar auflösbare Gleichung betrachtet werden kann.

Man muss also nicht *irgendeine* Äquivalenzumformung vornehmen, sondern eine, die sinnvoll ist! Sinnvoll heißt in diesem Fall, eine Umformung, die aus einer komplizierten eine einfachere Gleichung mit gleicher Lösungsmenge macht.

Das ist in den beiden ersten Beispielen oben nicht der Fall, wohl aber bei den letzten beiden, wie die anschließenden Termumformungen zeigen:

$x + 4 = 8$

$\Leftrightarrow \quad x + 4 - 4 = 8 - 4$

$\Leftrightarrow \quad x = 4$

$3x - 5 = 2x + 4$

$\Leftrightarrow \quad 3x - 5 - 2x = 2x + 4 - 2x$

$\Leftrightarrow \quad x - 5 = 4$

Im ersten Beispiel ergibt sich eine unmittelbar auflösbare Gleichung mit der Lösungsmenge L={4}, im zweiten Fall hat sich die Gleichung deutlich vereinfacht, man kann mit einen einzigen weiteren Schritt ebenfalls eine unmittelbar auflösbare Gleichung erhalten:

$3x - 5 = 2x + 4$

$\Leftrightarrow \quad 3x - 5 - 2x = 2x + 4 - 2x$

$\Leftrightarrow \quad x - 5 = 4$

$\Leftrightarrow \quad x - 5 + 5 = 4 + 5$

$\Leftrightarrow \quad x = 9$

$L = \{9\}$

Um den Lösungsweg besser nachvollziehen zu können, hat es sich eingebürgert, die notwendigen Äquivalenzumformungen hinter einem senkrechten Strich zu notieren:

$3x - 5 = 2x + 4 \qquad | -2x$

$\Leftrightarrow \quad 3x - 5 - 2x = 2x + 4 - 2x$

$\Leftrightarrow \quad x - 5 = 4 \qquad | +5$

$\Leftrightarrow \quad x - 5 + 5 = 4 + 5$

$\Leftrightarrow \quad x = 9$

$L = \{9\}$

Die Angaben –2x bzw. +5 bedeuten: Subtrahiere auf **beiden** Seiten der Gleichung 2x bzw. addiere auf **beiden** Seiten der Gleichung 5.

Eine Umwandlung von Gleichungen in unmittelbar auflösbare Gleichungen gelingt nicht immer, wenn man auf beiden Seiten der Gleichung den gleichen Term nur addieren oder nur subtrahieren darf. Häufig entstehen dann Gleichungen wie z. B.

$$3x = 9$$

$$\frac{1}{2}x = 5$$

$$5x = 9$$

Hier hilft die Einsicht weiter, dass man auch beide Seiten einer Gleichung durch die gleiche Zahl dividieren bzw. mit der gleichen Zahl multiplizieren darf.

Wenn sich eine Waage im Gleichgewicht befindet und man dann den Inhalt jeder Waagschale verdoppelt (verdreifacht, vervierfacht, usw.) ändert sich nichts am Gleichgewicht der Waage. Dasselbe gilt, wenn der Inhalt der Waagschalen halbiert, gedrittelt, geviertelt, usw.) wird. Wichtig ist allerdings, das immer der Inhalt der *gesamten* Schale vervielfacht bzw. geteilt wird. Rechnerisch bedeutet dies, dass die beiden Gleichungsseiten als Dividenden in Klammern gesetzt werden.

$$\begin{aligned} & x + 5 = 3 \qquad && |:2 \\ \Leftrightarrow\quad & (x + 5) : 2 = 3 : 2 && \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 2x - 7 = 3x \qquad && |\cdot 4 \\ \Leftrightarrow\quad & (2x - 7) \cdot 4 = 3x \cdot 4 && \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 3x = 15 \qquad && |:3 \\ \Leftrightarrow\quad & 3x : 3 = 5 : 3 && \\ \Leftrightarrow\quad & x = \frac{5}{3} && \end{aligned}$$

Keine Äquivalenzumformung liegt vor, wenn nur ein Teil einer Gleichungsseite vervielfacht oder geteilt wird:

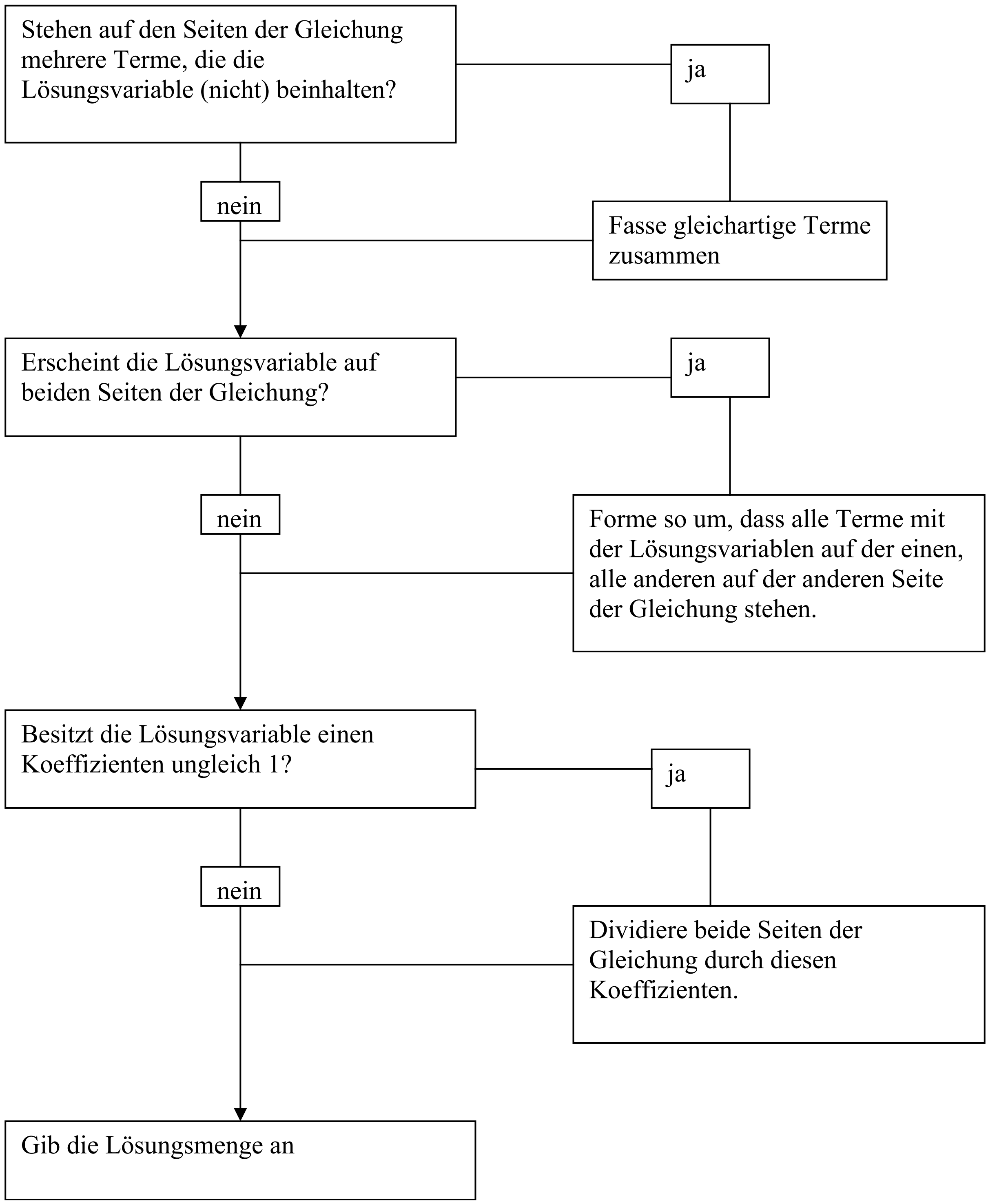
$$\begin{aligned} & 3x - 2 = 9 \qquad && |:3 \\ \not\Leftrightarrow\quad & 3x : 3 - 2 = 9 : 3 && \\ \Leftrightarrow\quad & x - 2 = 3 && |+2 \\ \Leftrightarrow\quad & x - 2 + 2 = 3 + 2 && \\ \Leftrightarrow\quad & x = 5 && \end{aligned}$$

Genau so wichtig ist auch zu beachten, dass man nicht durch 0 dividieren darf (eine Division durch 0 ist grundsätzlich verboten), aber auch, dass eine Multiplikation mit 0 keine Äquivalenzumformung ist.

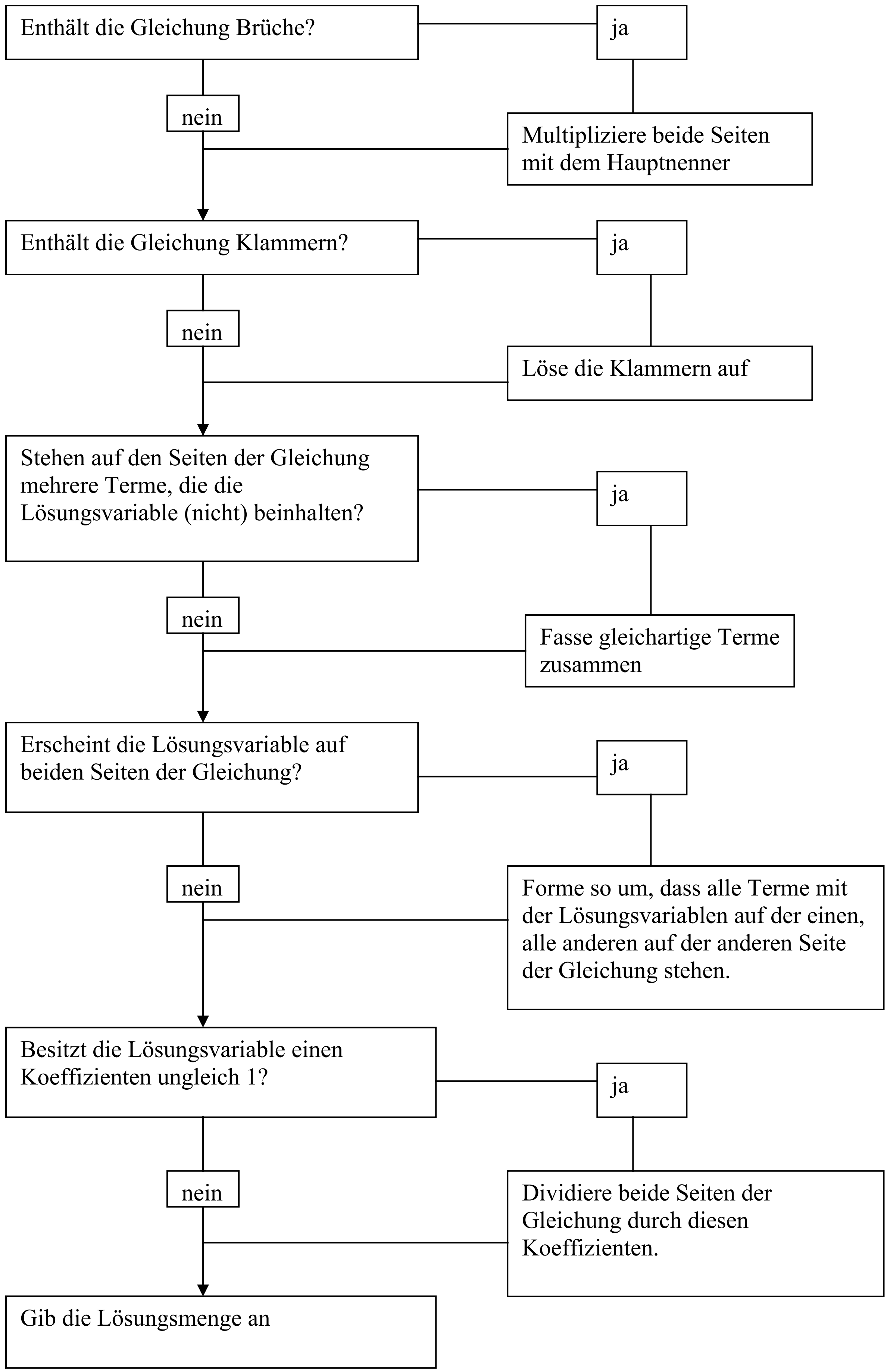
$$\begin{aligned} & x = 5 \quad |\cdot 0 \qquad && L = \{5\} \\ \not\Leftrightarrow\quad & 0 = 0 && L = \mathbb{Q} \end{aligned}$$

Werden beide Seiten einer Gleichung mit der gleichen Zahl (außer 0) multipliziert oder durch die gleiche Zahl (außer 0) dividiert, ändert sich die Lösungsmenge der Gleichung nicht (liegt eine Äquivalenzumformung vor).

Die Schwierigkeit beim Lösen von Gleichungen besteht darin, aus den vielen möglichen Äquivalenzumformungen die sinnvollen auszuwählen. Folgendes Vorgehen hat sich als besonders sinnvoll erwiesen:



Gelegentlich treten auch Gleichungen auf, die Brüche enthalten. Um sich das Rechnen mit Bruchzahlen zu ersparen, kann man beide Seiten der Gleichung mit dem Hauptnenner der Brüche multiplizieren. Tauchen in der Gleichung hingegen Klammern auf, sollten diese zunächst aufgelöst werden. Das vorgestellte Schema kann folgendermaßen ergänzt werden:


Enthält die Gleichung Brüche?
ja
nein
Multipliziere beide Seiten mit dem Hauptnenner
Enthält die Gleichung Klammern?
ja
nein
Löse die Klammern auf
Stehen auf den Seiten der Gleichung mehrere Terme, die die Lösungsvariable (nicht) beinhalten?
ja
nein
Fasse gleichartige Terme zusammen
Erscheint die Lösungsvariable auf beiden Seiten der Gleichung?
ja
nein
Forme so um, dass alle Terme mit der Lösungsvariablen auf der einen, alle anderen auf der anderen Seite der Gleichung stehen.
Besitzt die Lösungsvariable einen Koeffizienten ungleich 1?
ja
nein
Dividiere beide Seiten der Gleichung durch diesen Koeffizienten.
Gib die Lösungsmenge an