Prozentrechnung

Klaus erzählt, dass bei der letzten Mathe-Arbeit 6 seiner Mitschüler die Note „gut“ erhalten hätten. Seine Schwester Karin hat auch eine Arbeit zurück bekommen. In ihrer Klasse haben sogar 7 Schüler eine „2“ erhalten.

Vergleicht man die Anzahl der Schüler mit der Note „gut“ miteinander, schneidet die Klasse von Karin besser ab. Man spricht hier von einem Vergleich der **absoluten Werte**.

Berücksichtigt man dagegen, wie viele Schüler in den jeweiligen Klassen sind, bildet man den Vergleich der **relativen Werte**.

In der Klasse von Klaus sind 20 Schüler, in der seiner Schwester 25. Man bildet jetzt den Quotienten aus der Anzahl der Schüler mit der Note „gut“ der Gesamtzahl der Schüler:

$$\text{Klaus}: \frac{6}{20} \qquad \text{Karin}: \frac{7}{25}$$

Um diese Brüche besser miteinander vergleichen zu können, muss man sie gleichnamig machen. Als Hauptnenner findet man hier 100:

$$\text{Klaus}: \frac{6}{20} = \frac{30}{100} \qquad \text{Karin}: \frac{7}{25} = \frac{28}{100}$$

Der relative Anteil ist in Karins Klasse also größer als der von Klaus’ Klasse. Die Klasse von Klaus hat also das relativ bessere Ergebnis erzielt.

Brüche mit dem Nenner 100 gibt man oft in der sog. **Prozentschreibweise** an:

$$\frac{30}{100} = 30\% \qquad \frac{28}{100} = 28\%$$

Das Wort Prozent stammt aus dem Italienischen und bedeutet „für Hundert“. Gemeint ist, dass ein relativer Anteil durch einen Bruch mit dem Nenner 100 dargestellt wird.

Prozentangaben sind also nur eine andere Schreibweise für Bruchzahlen bzw. Dezimalzahlen:

$$25\% = \frac{25}{100} = 0,25$$

$$17,2\% = \frac{17,2}{100} = 0,172$$

Gelegentlich verwendet man zur Darstellung relativer Anteile auch die Promilleschreibweise. Promille bedeutet „für Tausend“. Gemeint sind also Brüche mit dem Nenner 1000. Das Promillezeichen lautet: ‰

$$2‰ = \frac{2}{1000} = 0,002 \qquad 5,4‰ = \frac{5,4}{1000} = 0,0054$$

Um den Vergleich von relativen Anteilen in der Prozentschreibweise zu ermöglichen, erweitert bzw. kürzt man so, dass sich der Nenner 100 ergibt. Wenn dies nicht geht, kann man auch den absoluten Wert durch die Gesamtzahl dividieren. Dies ist z.B. erforderlich, wenn auch die Klasse von Max, dem Freund von Klaus, in den Vergleich einbezogen werden soll. In dieser Klasse haben 8 von 29 Schülern die Note „gut“ erhalten.

$$\frac{8}{29} = 8 : 29 \approx 0,2759 = 27,59\%$$

In der Prozentrechnung bezeichnet man die Größe, auf die sich ein absoluter Wert bezieht, als **Grundwert G**. Der absolute Wert wird als **Prozentwert W** bezeichnet.

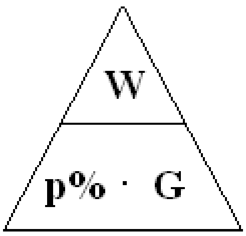
Der sog. **Prozentsatz p%** ergibt sich, wenn man den absoluten Wert durch den Grundwert dividiert: $p\% = \frac{W}{G}$

Die Zahl p nennt man auch **Prozentzahl**.

In der Klasse von Klaus ist also 6 der Prozentwert und 20 der Grundwert. Der Prozentsatz beträgt 30%.

100% eines Grundwertes ist stets der Grundwert selbst; es gilt: $G \hat{=} 100\%$

In der Prozentrechnung gibt es drei Grundaufgaben, die man auf unterschiedliche Art lösen kann. Zum einen kann man das Dreisatzverfahren anwenden, man kann aber auch mit Hilfe von Formeln arbeiten. Diese Formeln kann man sich mit Hilfe der folgenden Skizze merken:



Deckt man die gesuchte Größe ab, dann zeigt der Rest der Skizze, wie man rechnen muss, nämlich:

$$W = p\% \cdot G$$

$$G = \frac{W}{p\%}$$

$$p\% = \frac{W}{G}$$

Beispiel:

Berechne den Prozentwert, wenn der Grundwert 250€ und der Prozentwert 100€ beträgt.

$250€ \hat{=} 100\%$ $1€ \hat{=} \frac{100}{250}\%$ $100€ \hat{=} 100 \cdot \frac{100}{250}\% = 40\%$	$p\% = \frac{W}{G}$ $p\% = \frac{100}{250} = 0{,}4 = 40\%$

Berechne den Prozentwert, wenn der Prozentsatz 5% und der Grundwert 1200€ beträgt.

$100\% \hat{=} 1200€$ $1\% \hat{=} \frac{1200}{100}€$ $5\% \hat{=} 5 \cdot \frac{1200}{100}€ = 60€$	$W = p\% \cdot G$ $W = 5\% \cdot 1200€ = \frac{5}{100} \cdot 1200€ = 60€$

Berechne den Grundwert, wenn der Prozentsatz 12% und der Prozentwert 45€ beträgt.

$12\% \hat{=} 45€$ $1\% \hat{=} \frac{45}{12}€$ $100\% \hat{=} 100 \cdot \frac{45}{12}€ = 375€$	$G = \frac{W}{p\%}$ $G = \frac{45€}{12\%} = \frac{45€}{0{,}12} = 375€$

In vielen Aufgaben geht es darum, den Grundwert zu vermehren bzw. zu vermindern. Hier bestimmt man häufig den sog. Wachstumsfaktor. Wenn ein Kleidungsstück um 12% teurer wird, dann erhöht sich der Preis *um* 12% *auf* 112%. 112% (=1,12) wird als Wachstumsfaktor bezeichnet

Beispiel: Wie teuer ist eine Jacke, die vor der Preiserhöhung 65€ gekostet hat?

$100\% \triangleq 65€$ $1\% \triangleq \frac{65}{100}€$ $112\% \triangleq 112 \cdot \frac{65}{100}€ = 72{,}80€$	$W = p\% \cdot G$ $W = 112\% \cdot G = 1{,}12 \cdot 65€ = 72{,}80€$

Wird der Preis der Jacke anschließend um 10% gesenkt, erniedrigt sich also der Preis *um* 10% *auf* 90%, erhält man als neuen Preis:

$100\% \triangleq 72{,}80€$ $1\% \triangleq \frac{72{,}8}{100}€$ $90\% \triangleq 90 \cdot \frac{72{,}8}{100}€ = 65{,}52€$	$W = p\% \cdot G$ $W = 90\% \cdot G = 0{,}9 \cdot 72{,}80€ = 65{,}52€$

Mit dem Wachstumsfaktor arbeitet man auch im Zusammenhang mit Preisen, die die sog. Mehrwertsteuer (momentan 19%) enthalten. Der Verkaufspreis einer Ware besteht aus dem eigentlichen Preis (100%) und der Mehrwertsteuer (19%).

Wenn die oben beschriebene Jacke die Mehrwertsteuer beinhaltet, kann man den reinen Preis bestimmen:

$119\% \triangleq 65{,}52€$ $1\% \triangleq \frac{65{,}52}{119}€$ $100\% \triangleq 100 \cdot \frac{65{,}52}{119}€ \approx 55{,}06€$	$G = \frac{W}{p\%}$ $G = \frac{65{,}52€}{119\%} = \frac{65{,}52€}{1{,}19} \approx 55{,}06€$

Ein Sonderfall der Prozentrechnung ist die *Zinsrechnung*. Als Zinsen bezeichnet man Geld, das man als Vergütung dafür erhält, wenn man anderen einen bestimmten Geldbetrag zur Verfügung stellt. Das passiert immer dann, wenn man Geld zur Sparkasse oder Bank bringt oder wenn man sich dort Geld leiht. In der Zinsrechnung benutzt man andere Begriffe:

Statt von einem Grundwert spricht man von einem *Kapital*. Den Prozentwert nennt man *Jahreszinsen* und den Prozentsatz *Zinssatz*.

Beispiel: Julia hat zu Beginn eines Jahres 345€ auf ihrem Sparbuch. Die Sparkasse verzinst diese Geld mit 2%. Wie viel Zinsen erhält Julia am Ende des Jahres?

$100\% \mathrel{\hat{=}} 345€$ $1\% \mathrel{\hat{=}} \frac{345}{100}€$ $2\% \mathrel{\hat{=}} 2\cdot\frac{345}{100}€ = 6{,}90€$	$W = p\%\cdot G$ $W = 2\%\cdot 345€ = 0{,}02\cdot 345€ = 6{,}90€$

Wenn Julia wissen möchte, wie viel Geld sie am Ende des Jahres insgesamt hat, verwendet man wieder den Wachstumsfaktor und rechnet:

$100\% \mathrel{\hat{=}} 345€$ $1\% \mathrel{\hat{=}} \frac{345}{100}€$ $102\% \mathrel{\hat{=}} 102\cdot\frac{345}{100}€ = 351{,}90€$	$W = p\%\cdot G$ $W = 102\%\cdot 345€ = 1{,}02\cdot 345€ = 351{,}90€$

Komplizierter wird es, wenn Julia ihr Geld vor Ablauf eines Jahres abheben möchte. Dann werden Zinsen nicht für ein Jahr, sondern für einen geringeren Zeitraum gezahlt. Üblicherweise rechnet man im Bankwesen damit, dass ein Monat 30 Tage hat, egal, ob der Monat in Wirklichkeit 30 oder 31 (oder sogar nur 28 bzw. 29) Tage hat. Man muss dann in einem Dreisatz die Zinsen für diese geringere Zeitspanne berechnen:

Wie viel Zinsen erhält Julia, wenn sie das Geld nach 140 Tagen von ihrem Konto abhebt?

$100\% \mathrel{\hat{=}} 345€$ $1\% \mathrel{\hat{=}} \frac{345}{100}€$ $2\% \mathrel{\hat{=}} 2\cdot\frac{345}{100}€ = 6{,}90€$ $360\,\text{T} \mathrel{\hat{=}} 6{,}90€$ $1\,\text{Tag} \mathrel{\hat{=}} \frac{6{,}90}{360}€$ $140\,\text{T} \mathrel{\hat{=}} 140\cdot\frac{6{,}90}{360} \approx 2{,}68€$	$W = p\%\cdot G$ $W = 2\%\cdot 345€ = 0{,}02\cdot 345€ = 6{,}90€$ $360\,\text{T} \mathrel{\hat{=}} 6{,}90€$ $1\,\text{Tag} \mathrel{\hat{=}} \frac{6{,}90}{360}€$ $140\,\text{T} \mathrel{\hat{=}} 140\cdot\frac{6{,}90}{360} \approx 2{,}68€$

Man könnte auch die Frage stellen, wie lange Julia ihr Geld bei der Bank lassen muss, wenn sie 3 € Zinsen erhalten möchte

Zunächst werden die Jahreszinsen ermittelt: $100\% \mathrel{\hat{=}} 345€$ $1\% \mathrel{\hat{=}} \frac{345}{100}€$ $2\% \mathrel{\hat{=}} 2 \cdot \frac{345}{100}€ = 6{,}90€$ Jetzt kann mit Hilfe eines Dreisatzes ermittelt werden, wie viel Tage Julias Geld verzinst werden muss: $6{,}90€ \mathrel{\hat{=}} 360T$ $1€ \mathrel{\hat{=}} \frac{360}{6{,}9}€$ $3€ \mathrel{\hat{=}} 3 \cdot \frac{360}{6{,}9}€ \approx 157T$	Zunächst werden die Jahreszinsen ermittelt: $W = p\% \cdot G$ $W = 2\% \cdot 345€ = 0{,}02 \cdot 345€ = 6{,}90€$ Jetzt kann mit Hilfe eines Dreisatzes ermittelt werden, wie viel Tage Julias Geld verzinst werden muss: $6{,}90€ \mathrel{\hat{=}} 360T$ $1€ \mathrel{\hat{=}} \frac{360}{6{,}9}€$ $3€ \mathrel{\hat{=}} 3 \cdot \frac{360}{6{,}9}€ \approx 157T$

Eine neue Frage taucht auf: Wie hoch müsste der Zinssatz sein, damit Julia nach 5 Monaten 5€ Zinsen erhält?

Zunächst werden die Jahreszinsen ermittelt: $5M \mathrel{\hat{=}} 5€$ $1M \mathrel{\hat{=}} \frac{5}{5}€$ $12M \mathrel{\hat{=}} 12 \cdot \frac{5}{5}€ = 12€$ Jetzt kann mit Hilfe eines Dreisatzes ermittelt werden, wie hoch der Zinssatz sein muss: $345€ \mathrel{\hat{=}} 100\%$ $1€ \mathrel{\hat{=}} \frac{100}{345}\%$ $12€ \mathrel{\hat{=}} 12 \cdot \frac{100}{345}\% \approx 3{,}5\%$	Zunächst werden die Jahreszinsen ermittelt: $5M \mathrel{\hat{=}} 5€$ $1M \mathrel{\hat{=}} \frac{5}{5}€$ $12M \mathrel{\hat{=}} 12 \cdot \frac{5}{5}€ = 12€$ Für den Zinssatz ergibt sich: $p\% = \frac{W}{G}$ $p\% = \frac{12}{345} \approx 0{,}035 = 3{,}5\%$

Wenn der Zinssatz nicht erhöht wird, kann Julia auch auf eine andere Art und Weise 5€ Zinsen erhalten: Sie muss ihr Guthaben bei der Bank erhöhen. Wie hoch muss es also sein, um in 5 Monaten 5€ Zinsen zu erhalten, wenn der Zinssatz bei 2% bleibt?

Zunächst werden die Jahreszinsen ermittelt: 5M $\triangleq$ $5€$ 1M $\triangleq$ $\frac{5}{5}€$ 12M $\triangleq$ $12 \cdot \frac{5}{5}€ = 12€$ Jetzt kann mit Hilfe eines Dreisatzes ermittelt werden, wie hoch das Guthaben sein muss: 2% $\triangleq 12€$ 1% $\triangleq \frac{12}{2}€$ 100% $\triangleq 100 \cdot \frac{12}{2}€ = 600€$	Zunächst werden die Jahreszinsen ermittelt: 5M $\triangleq$ $5€$ 1M $\triangleq$ $\frac{5}{5}€$ 12M $\triangleq$ $12 \cdot \frac{5}{5}€ = 12€$ Für das erforderliche Kapital ergibt sich: $G = \frac{W}{p\%}$ $G = \frac{12}{2\%}€ = \frac{12}{0,02}€ = 600€$

Lässt Julia ihr Geld länger als 1 Jahr auf ihrem Sparbuch, werden am Ende eines jeden Jahres die Zinsen dem alten Guthaben zugeschlagen. Man spricht von *Zinseszins*. Um auszurechnen, wie hoch ein Guthaben ist, das man für t Jahre auf der Bank belässt, benötigt man die Zinseszinsformel. Sie lautet:

$$k = k_o \cdot q^t$$

Dabei bedeutet:

k	Kapital nach t Jahren
k_o	Anfangskapital
q	Wachstumsfaktor
t	Zeit in Jahren

Wie viel Geld erhält Julia, wenn sie ihre 345€ 5 Jahre lang auf ihrem Sparbuch lässt?

$k = k_o \cdot q^t$

$k = 345€ \cdot 1{,}02^5 \approx 380{,}91€$